ضلعه $\sqrt{2}$ وقطراه منطبقان على المحاور الأحداثية كما بالشكل :

جواب السؤال الثاني (١٨ درجة):

١)- لنبين أن كل كرة مغلقة في فضاء خطي منظم $(X,\|*\|)$ تكون مجموعة محدبة.
لتكن $S[x_0,r]$ كرة مغلقة مركزها x_0 ونصف قطرها r في الفضاء الخطي المنظم X ولنثبت أن القطعة المستقيمة $0\le\alpha\le1$; $z=(1-\alpha)x+\alpha y$ بين النقطتين x و y من $S[x_0,r]$ تقع داخل هذه الكرة.
بما أن x و y من الكرة $S[x_0,r]$ نجد أن $\|y-y_0\|\le r$, $\|x-x_0\|\le r$ وأن :

$$\|z-x_0\|=\|(1-\alpha)x+\alpha y-x_0\|=\|(1-\alpha)x+\alpha y-(1-\alpha)x_0-\alpha x_0\|\le$$
$$\|(1-\alpha)(x-x_0)\|+\|\alpha(y-y_0)\|\le(1-\alpha)r+\alpha r$$

وهكذا نرى أن $\|z-x_0\|\le r$ مما يعني أن $z\in S[x_0,r]$ أي المجموعة محدبة .

٢)- هذين الفضاءين هما $AC_0[a,b]$ و $L_1[a,b]$ ولنثبت ذلك . لنضع :

$$\Phi:AC_0[a,b]\longrightarrow L_1[a,b]$$
$$f\mapsto\Phi(f)=\varphi$$

من أجل أي عنصرين f و g من $AC_0[a,b]$ يوجد عنصران مناسبان φ و Ψ من $L_1[a,b]$ بحيث يكون:

$$f(x)=\int_a^x\varphi(t)dt\ \ ;\ \ g(x)=\int_a^x\psi(t)dt$$

ومن أجل أي عددين λ و μ نجد: $\Phi(\lambda f+\mu g)=\lambda\varphi+\mu\psi=\lambda\Phi(f)+\mu\Phi(g)$

إذن Φ تطبيق خطي كما أن : $f\in AC_0[a,b]$: $\|\Phi(f)\|_{L_1}=\|\varphi\|_{L_1}=\int_a^b|\varphi(t)|dt=\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=\|f\|_{BV}$

إذن Φ يحافظ على النظيم وبالتالي متباين أيضاً (انظر (٣-٨) الملاحظة (١٠)).
ويكون Φ غامراً أيضاً لأنه من أجل أي عنصر $h(x)$ من $L_1[a,b]$ يكفي أخذ التابع المستمر مطلقاً $F(x)$:

$$F(x)=\int_a^x h(t)dt\ \ ;\ x\in[a,b]$$

فيكون $\overset{b}{\underset{a}{V}}(F)=\int_a^b|h(t)|dt$ كما أن $\Phi(F)=h$.

إذن Φ إيزومورفيزم من $AC_0[a,b]$ على $L_1[a,b]$ وبالتالي هذان الفضاءان إيزومورفيان لبعضهما.

جواب السؤال الثالث (٨+١٢=٢٠ درجة):

حسب الفرض $A=\{\{x_n\}\in\ell_2:\ x_{2n}=0\ ,\forall n\in N\}$ ولنوجد $A^\perp$.
بفرض $S=\{\{x_n\}\in\ell_2\ :\ x_{2n-1}=0\ ,\ \forall n\in N\}$ إذا كان $x\in S\ \&\ y\in A$ عندئذٍ

$$\langle x,y\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\bar{y}_n=0$$

وبالتالي $x\in A^\perp$ هذا يؤدي أن $S\subset A^\perp$. وبالعكس بفرض $x\in A^\perp$, $x_{2m-1}\ne0$ من أجل $m\in\mathbb{N}$.
الشعاع $\bar{e}_{2m-1}$ عنصر من قاعدة متعامدة في ℓ_2 إن $e_{2m-1}\in A$ أي أن $0=\langle x,\bar{e}_{2m-1}\rangle=x_{2m-1}$ وهذا يتناقض مع أن $x_{2m-1}\ne0$ وذلك من أجل كل $m\in\mathbb{N}$ أي أن $x\in S$ وبالتالي $A^\perp\subset S$ وبذلك يتم المطلوب.

Scanned by CamScanner

ب) (1)⇐(2): بما أن الجملة $h_1,h_2,\dots$ تامة فإن مساواة بارسيفال محققة وبالتالي فإن المتتالية

$\left\{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k h_k\right\}$ ستكون متقاربة من x وبالتالي: $x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k h_k=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k h_k$

(2)⇐(3): نفترض أن $\langle x,h_k\rangle=0$ مهما يكن $k=1,2,3\dots$ فيكون: $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k h_k=\lim\theta=0$

(3)⇐(1): نفرض جدلاً أن الجملة $h_1,h_2,\dots$ غير تامة، عندئذٍ يوجد عنصر واحد على الأقل y من H تتحقق من أجله مساواة بارسيفال ، أي:

$$\|y\|^2>\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^2 \quad ; \quad \alpha_k=\langle y,h_k\rangle$$

وبما أن المتتالية $\left\{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k h_k\right\}$ متتالية كوشي في H لهذا فإنه يوجد عنصر z من H

$z=\lim\sum_{k=1}^{n}\alpha_k h_k$ لذلك فإن مساواة بارسيفال محققة أي أن: $\alpha_k=\langle z,h_k\rangle$; $\|z\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^2$

من أجل $k=1,2,3\dots$ يكون: $\langle y-z,h_k\rangle=\langle y,h_k\rangle-\langle z,h_k\rangle=\alpha_k-\alpha_k=0$

وهذا يعني أن $y-z=0$ وبالتالي فإن $y=z$.

من ناحية ثانية لدينا: $\|y\|^2>\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^2=\|z\|^2$

أي أن: $\|y\|>\|z\|$ وهذا غير صحيح طالما $y=z$ إذن الفرض الجدلي خاطئ والجملة $h_1,h_2,\dots$ تامة.

جواب السؤال الرابع (١٥ درجة):

لنأخذ العنصرين $x_1=(\xi_1,\xi_2,\dots)$ و $x_2=(\zeta_1,\zeta_2,\dots)$ من الفضاء ℓ_2 عندئذ:

$$A(\alpha x_1+\beta x_2)=A(\alpha\xi_1+\beta\zeta_1,\alpha\xi_2+\beta\zeta_2,\dots)=\left(\frac{\alpha\xi_1+\beta\zeta_1}{1},\frac{\alpha\xi_2+\beta\zeta_2}{2},\dots\right)=$$

$$\alpha\left(\frac{\xi_1}{1},\frac{\xi_2}{2},\dots\right)+\beta\left(\frac{\zeta_1}{1},\frac{\zeta_2}{2},\dots\right)=\alpha A(x_1)+\beta A(x_2)$$

إذن A خطي . ولنبرهن أنه محدود .

$$\|A(x)\|_{\ell_2}=\left\|\left(\frac{\xi_1}{1},\frac{\xi_2}{2},\frac{\xi_3}{3},\dots\right)\right\|_{\ell_2}=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|\frac{\xi_i}{i}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\le\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\le c\|x\|$$

حيث $x=(\xi_i)$. هذا يعني إن T محدود ، وهنا C=1 .

لنوجد $\|A\|$:

$$\|A(x)\|_{\ell_2}\le\|x\|\Rightarrow\sup_{\substack{x\in\ell_2\\x\ne0}}\frac{\|A(x)\|}{\|x\|}\le1\Rightarrow\|A\|\le1 \qquad (1)$$

من جهة أخرى لنأخذ $\sigma=(1,0,0,\dots)$ من الفضاء ℓ_2 عندئذ $\|\sigma\|=1$ كما أن : $\|A(\sigma)\|=1$.

كما أن $\sup_{\substack{x\in\ell_2\\x\ne0}}\|A(x)\|\ge\sup_{\substack{\sigma\in\ell_2\\\|\sigma\|=1}}\|A(\sigma)\|=1$ أي أن $\|A\|\ge1$ (2) من (1) و (2) نستنتج أن $\|A\|=1$

نفرض أن $y=(\eta_i)$ وأن $A^*(y)=(z_i)\quad ;\ i=1,2,3,\ldots$ وكما هو معلوم من أجل $x_1=(\xi_1,\xi_2,\ldots)$ و $x_2=(\zeta_1,\zeta_2,\ldots)$ من الفضاء ℓ_2 فإن الجداء الداخلي في ℓ_2 يعطى بالعلاقة: $\langle x_1,x_2\rangle=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\overline{\zeta_i}$. بالتالي يكون:

$$\langle Ax,y\rangle=\langle x,A^*y\rangle\Rightarrow\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\xi_i}{i}\overline{\eta_i}=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\overline{z_i}$$

بالمطابقة بين الطرفين نجد: $z_1=\frac{\eta_1}{1},z_2=\frac{\eta_2}{2},\ldots,z_n=\frac{\eta_n}{n}$ بذلك فإن:

$A^*y=(\frac{\eta_1}{1},\frac{\eta_2}{2},\ldots,\frac{\eta_i}{i},\ldots)$. من هذا نستنتج أن $A^*=A$ اي أن المؤثر مترافق ذاتيا.

جواب السؤال الخامس (١٥ درجة): الفضاء المرافق للفضاء ℓ_1:

لنأخذ (e_i) قاعدة شاودر للفضاء ℓ_1 عندئذٍ كل عنصر x من ℓ_1 يكتب بالشكل: $x=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i e_i$

ليكن f دالياً خطياً محدوداً. عندئذٍ:

$$f(x)=f\left(\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i e_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i f(e_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i f_i \qquad (1)$$

حيث $f_i=f(e_i)$ تتعرف بشكل وحيد بواسطة الدالي f. ولما كان $\|e_i\|=1$ فإن:

$$|f_i|=|f(e_i)|\le\|f\|\,\|e_i\|=\|f\|$$

أي: $\qquad (2)$

$$\sup_i|f_i|\le\|f\|$$ فإن $(f_i)\in\ell_\infty$.

من جهة أخرى ومن أجل كل عنصر من ℓ_∞ وليكن $\zeta=(\zeta_i)$ يمكننا إيجاد دالي خطي محدود g على ℓ_1 يكون:

$g(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\zeta_i$ حيث $x=(\xi_i)\in\ell_1$. نلاحظ أن $g\in\ell_1^*$ لأن g خطي ومحدود لأن

$$|g(x)|\le\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i\cdot\zeta_i|\le\sup_i\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|=\|x\|\sup_i|\zeta_i|$$

من العلاقة (1) نجد:

$$|f(x)|\le\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i f_i|\le\sup_i\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|=\|x\|\sup_i|f_i|$$

بأخذ $\|x\|=1$ نجد: $\qquad (3)$

$$\|f\|\le\sup_i|f_i|$$

من المتراجحتين (2) و (3) نستنتج:

$$\|f\|=\sup_i|f_i|$$

وهذا يعني أن نظيم f ليس إلا النظيم على الفضاء ℓ_∞. وبالتالي نجد أن الفضاء المرافق ℓ_1 هو الفضاء ℓ_∞.

نعرّف الفضاء $b_a(N)$ بأنه مجموعة كل التوابع: $\mu:P(N)\longrightarrow R$ المحدودة والجمعية المنتهية مع العمليات الخطية المعروفة. حيث $P(N)$ لمجموعة كل أجزاء مجموعة الأعداد الطبيعية N.

الفضاء $b_a(N)$ هو الفضاء المرافق للفضاء ℓ_∞ أي $\ell_\infty^*=b_a(N)$، نستنتج أن الفضاء ℓ_∞ ليس انعكاسي

حمص في ٢٠١٦/١/٣١ م. انتهت الإجابات

مدرسا المقرر

د. سامح العرجة ، د. محمد عامر

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الفصل الأول ٢٠١٥-٢٠١٦
أسئلة مقرر التحليل التابعي (١)
لطلاب السنة الرابعة تحليل رياضي

المدة : ساعة ونصف
العلامة:(١٠٠) درجة
الاسم : براءة الأشقر

السؤال الأول (٣٢ درجة):

أ) لتكن S مجموعة كل المتتاليات العددية ، ولنعرف عليها المسافة بالشكل :

$$d(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|x_k-y_k|}{1+|x_k-y_k|} \quad ; \; x=\{x_k\},y=\{y_k\}\in s$$

أثبت أن الفضاء المتري (s,d) خطياً ، وهل هو فضاء منظم وباناخ أم لا؟ ولماذا؟ .

ب) ماذا نقصد بالمنظم الكلي، ثم أحسب المسافة بين التابعين: $g(x)=-1$, $f(x)=x^2$ في فضاء التوابع ذات التغيرات المحدودة على الفترة $[0,1]$.

ت) لنفرض لدينا الفضاء المتري $(\mathbb{R}^2,\rho)$ حيث ρ معرف كالآتي :

$$\rho(p,q)=|x-x_0|+|y-y_0| \qquad ; p(x_0,y_0),q(x,y)\in\mathbb{R}^2$$

والمطلوب: إيجاد الكرة المفتوحة $s(p,r)$ ومن ثم الكرة $s((0,0),1)$ مع التوضيح بالرسم .

ومتى نقول عن فضاءين متريين (تبولوجيين) أنهما متكافئين؟ .

السؤال الثاني (١٨ درجة):

أ)- بين أن الكرة المغلقة في فضاء خطي منظم هي مجموعة محدبة.

ب)- اذكر مثالاً على فضاءين ايزومورفيين لبعضهما ثم أثبت ذلك.

السؤال الثالث (٨+١٢=٢٠درجة):

أ)- إذا كان $A=\{\{x_n\}\in\ell^2 : x_{2n}=0\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}\}$ اوجد $A^{\perp}$.

ب)- لتكن $h_1,h_2,\dots\dots$ جملة متعامدة نظامية في فضاء هيلبرت H . أثبت أن القضايا الآتية متكافئة فيما بينها:

(١) الجملة $h_1,h_2,\dots\dots$ تامة في H .

(٢) كل عنصر $x\in H$ يكتب بشكل وحيد كما يلي : $x=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k h_k \quad ; \quad \alpha_k=\langle x,h_k\rangle$

(٣) إذا كان $\langle x,h_k\rangle=0$ مهما يكن $k=1,2,3\dots\dots$ فإن $x=\theta$.

السؤال الرابع (١٥ درجة):

أثبت أن المؤثر A حيث : $A:\ell_2\to\ell_2$ المعرف بالشكل : $Y=AX$ حيث :

$X=(\xi_i)\in\ell_2\ \&\ i=1,2,\dots$; $Y=(\eta_i)=(\frac{\xi_i}{i})$ هو مؤثر خطي ومحدود.

أوجد $\|A\|$ و A^* ماذا ندعو المؤثر A ؟ .

السؤال الخامس (١٥ درجة):

أوجد الفضاء المرافق ℓ_1 وهل هذا الفضاء انعكاسيا أم لا .

انتهت الأسئلة

حمص في ٣١ / ١ / ٢٠١٦ م. مع التمنيات بالنجاح والتوفيق

مدرسا المقرر
د. سامح العرجة ، د. محمد عامر